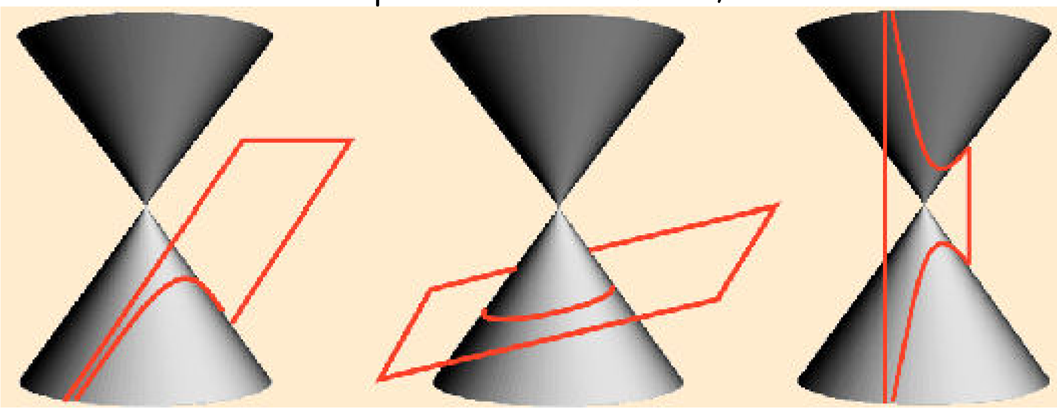
Costruzione delle coniche con riga e compasso

Quando in matematica è possibile dare diverse definizioni, tutte equivalenti, di uno stesso oggetto, allora significa che quell'oggetto può essere caratterizzato in molti modi, e quindi possiede molte proprietà. Questo è ciò che accade per le coniche, di cui si possono dare quattro definizioni diverse:

- Come intersezioni tra un piano e un cono infinito,



- Come luoghi di punti per i quali è costante il quoziente tra la distanza da un punto e quella da una retta; la costante è detta **eccentricità** e il suo valore determina di quale tipo di conica si tratta:
  - $e = 1$ parabola
  - $0 < e < 1$ ellisse
  - $e > 1$ iperbole

- Come luoghi dei punti per i quali è costante la somma, oppure la differenza delle distanze da due punti dati, detti fuochi (per l'ellisse e per l'iperbole rispettivamente),

- Come luoghi di punti le cui coordinate soddisfano un'equazione di secondo grado della forma

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0.$$

In questo caso, la teoria degli invarianti rispetto alle affinità piane fornisce una facile verifica del tipo di conica di cui si parla:

$$I_3 = \det\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

si annulla solo se la conica è degenere (coppia di rette, reali e distinte, complesse coniugate o coincidenti),

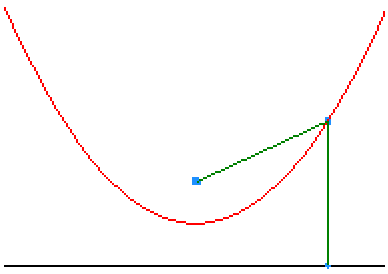
$$I_2 = \det\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

si annulla se è una parabola, è positivo se è una ellisse, è negativo se è una iperbole,
$\mathbf{I_1} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$ si annulla nel caso di una iperbole equilatera.

Mostriamo come sia possibile tracciare una conica, con riga e compasso (utilizzeremo per visualizzare le costruzioni, il software geometrico "**Geogebra**"). Cliccare sull'icona di Geogebra presente sotto le varie costruzioni per vederle.

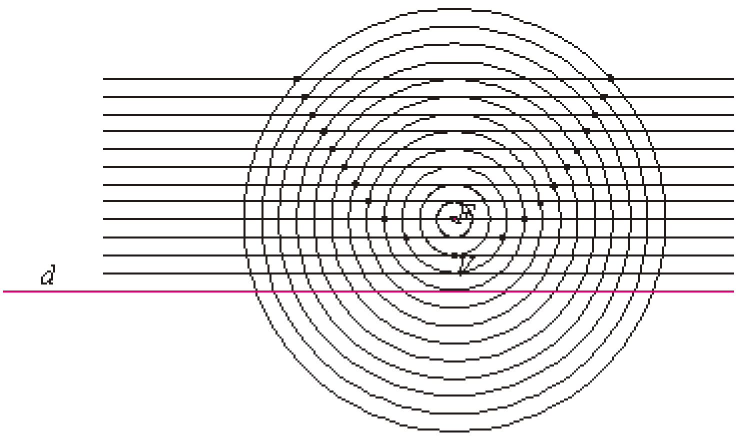
Parabola

Sfruttiamo la definizione di parabola come luogo dei punti equidistanti da un punto (il fuoco *F*) e da una retta (la direttrice *d*), che supponiamo disegnate.



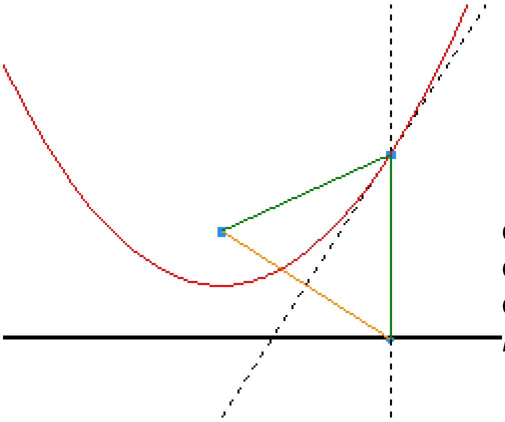
Metodo 1

Fissata una distanza *k*, tracciamo la circonferenza di centro *F* e raggio *k* e la retta parallela alla direttrice a distanza *k* da essa. I due punti di intersezione tra la circonferenza e la retta hanno distanza *k* sia dal punto *F* che dalla retta *d*, dunque appartengono alla parabola: i due punti sono simmetrici rispetto alla retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice, cioè all'asse del la parabola; quindi possiamo tracciare due punti della parabola per ogni valore *k*, purché *k* sia maggiore della metà *s* della distanza tra *F* e *d*.
Per *k* = *s*/2 l'unico punto d'intersezione è il vertice della parabola.



Metodo 2

Si costruisce per un punto *P* della direttrice la perpendicolare alla stessa. Si costruisce l'asse del segmento *PF*. L'intersezione delle due rette è un punto della parabola.
Si osserva che l'asse costruito risulta tangente alla parabola, quindi l'insieme degli assi è l'inviluppo della parabola.

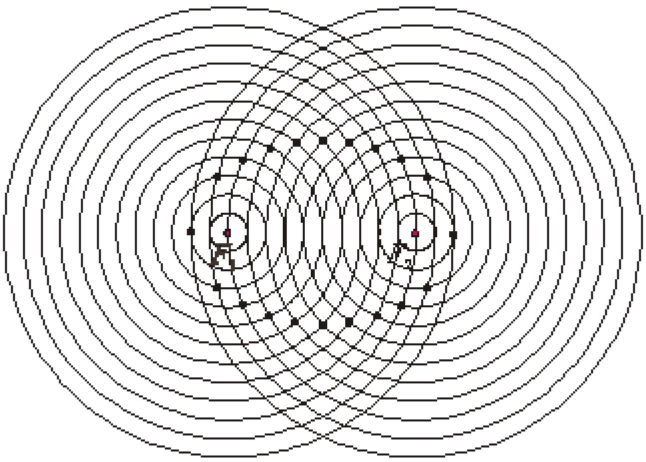


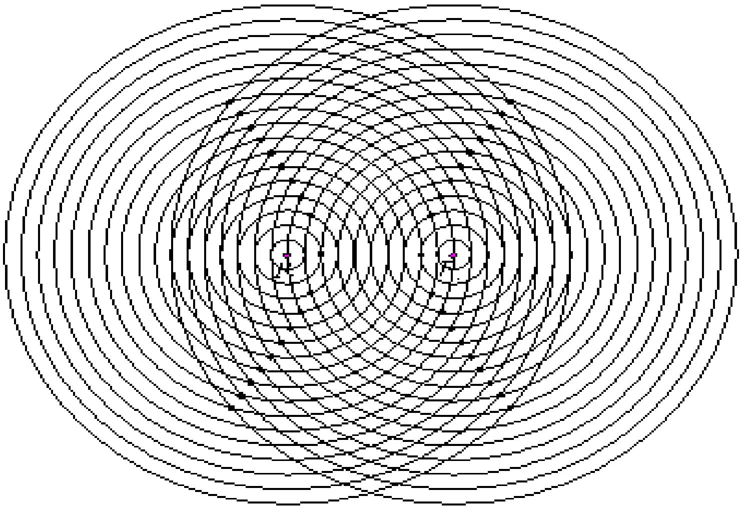
Ellisse e iperbole

L'ellisse è il luogo dei punti che hanno distanze di **somma** costante k dai fuochi F_1 ed F_2.
L'iperbole è il luogo dei punti che hanno distanze di **differenza** costante k dai fuochi F_1 ed F_2

Metodo 1 (coi due fuochi)

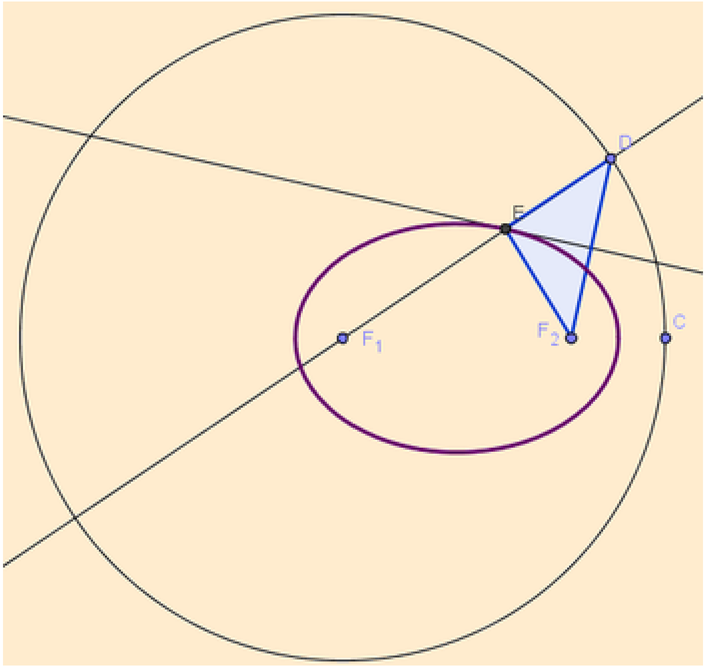
Tracciando due circonferenze con centri nei fuochi F_1 e F_2 e di raggi r e $k - r$, ottenuti per esempio disegnando un segmento di lunghezza k e prendendo un punto *P* variabile su tale segmento, e quindi tale che la distanza dai due estremi siano i due valori richiesti, i loro punti di intersezione hanno somma delle di stanze dai fuochi uguale a k, e dunque appartengono all'ellisse.
Se tracciamo invece due circonferenze con centri nei fuochi F_1 e F_2 e di raggi r e $k + r$, ottenuti, per esempio, fissando su una retta un segmento *AB* di lunghezza k per cui se *P* è un punto variabile sulla retta e *PB* è r, *PA* è $r + k$, i loro punti di intersezione hanno differenza delle distanze dai fuochi uguale a k e dunque appartengono all'iperbole.

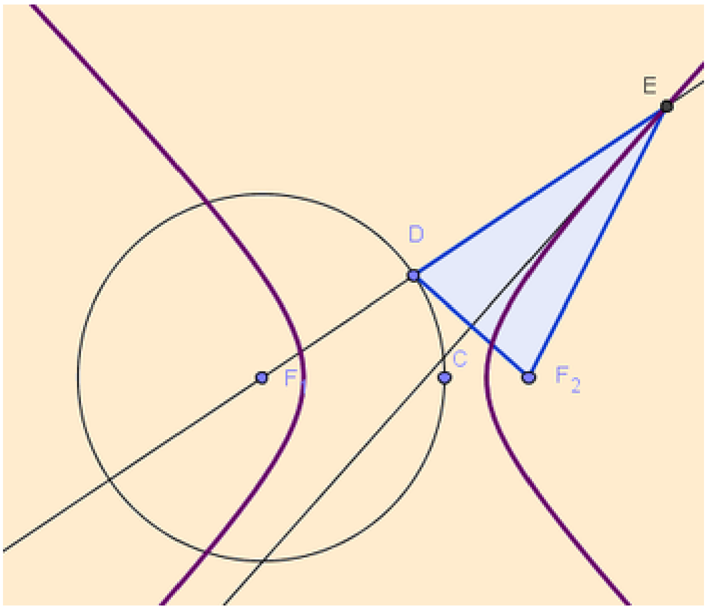




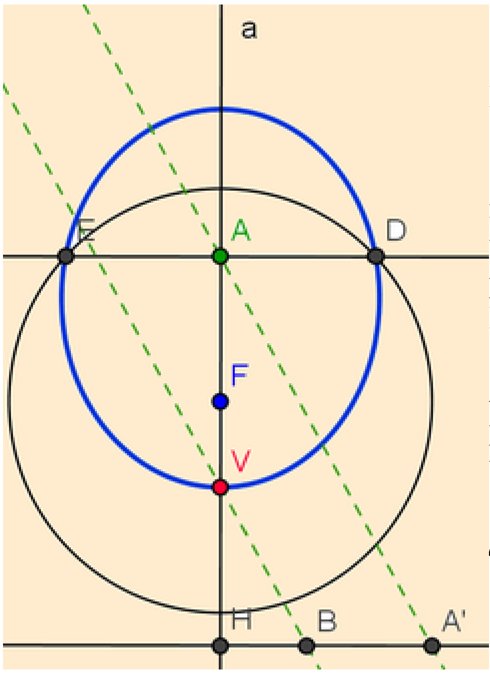
Metodo 2 (coi due fuochi)

Si traccia una circonferenza con centro in un fuoco F_1 e raggio ***r* maggiore della distanza focale**. Per ogni punto D su di essa si traccia l'asse del segmento DF_2. La retta DF_1 interseca tale asse in punti dell'ellisse.
Il triangolo DEF_2(blu nel disegno) è infatti isoscele, per cui la somma delle distanze dai due fuochi è uguale al raggio della circonferenza che è fisso per costruzione.
In modo del tutto analogo, si traccia una circonferenza con centro in un fuoco F_1 e raggio ***r* minore della distanza focale**. Per ogni punto D su di essa si traccia l'asse del segmento DF_2. La retta DF_1 interseca tale asse in punti dell'iperbole. (Questo metodo è del tutto identico a quello della ellisse, l'unica differenza è la condizione sul raggio della circonferenza).
Infatti il triangolo DEF_2 è anche in questo caso isoscele (di base DF_2), quindi $DE = EF_2$. Allora $DF_1 - DE = DF_1 - DF_2 = r$ e questa è la definizione dell'iperbole.





Metodo 4 (con fuoco, direttrice e eccentricità)



Supponiamo disegnati una retta *d* (direttrice) e un punto *F* fuori di essa (il fuoco).
Disegnata la perpendicolare *a* alla direttrice passante per il fuoco, sia *H* l'intersezione di *a* e *d*. Un vertice *V* della conica starà necessariamente tra il fuoco e *H*. La posizione di *V* rispetto a *F* e *H* individua l'eccentricità. Preso poi un punto *A* variabile su *a*, si consideri la retta *p* perpendicolare ad *a* e passante per *A*.
Portato da *H* sulla retta *d* un segmento lungo come *FV* e congiunto *V* col punto *B* che così si determina, il triangolo *HVB* risulta simile al triangolo *HAA'* ove la retta *AA'* è la parallela alla *VB*; pertanto il rapporto *VH*/*HB* = *VH*/*VF* risulta uguale a *AH*/*HA'*.
Quindi la circonferenza di centro *F* e raggio *HA'* taglia la retta *p* in due punti del luogo.