Aree e contorni

ovvero come misurare l'area di una regione girandoci intorno.

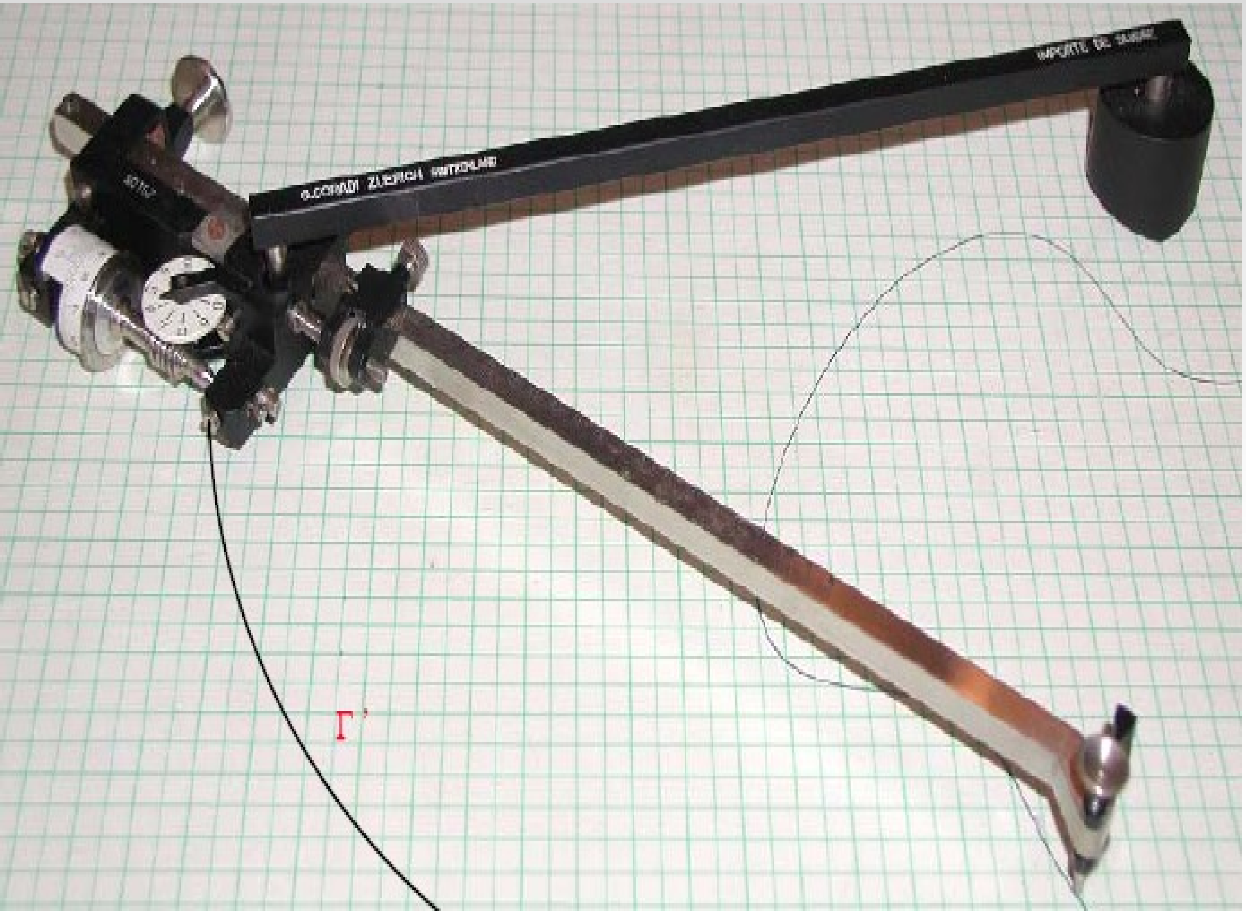
con una rassegna sugli strumenti meccanici per il calcolo di integrali, baricentri, momenti d'inerzia, coefficienti di Fourier, etc. e risolutori di equazioni differenziali.

una conferenza di “antiquariato” della Matematica

Analizzatore armonico di W. Thomson – Londra, Museo della Scienza

strumento “meccanico” per fare l'analisi di Fourier

Planimetro



Ho ancora vivo il ricordo del giorno in cui dal mio professore di matematica - ero allora uno scolaretto di Istituto tecnico - sentii per la prima volta parlare di certi apparecchi nei quali una punta poteva farsi scorrere lungo il contorno di una figura piana, e una rotella ad essa collegata segnava, in una certa scala, l'area racchiusa. Confesso che la cosa mi fece strabiliare.

Guido Ascoli, Vedute sintetiche sugli strumenti integratori,
Rend. Sem. Fis. Mat. Milano (18), 1947

Guido Ascoli

(Livorno, 12 dicembre 1887 – Torino, 10 maggio 1957)

(da non confondere con Giulio Ascoli (1843-1896), quello del Teorema di Ascoli-Arzelà)

Laureato a Pisa nel 1907, dal **1909 al 1932** fu **insegnante nelle scuole secondarie**;
dal 1920 a Torino riprese l'attività scientifica che lo portò nel 1932 alla cattedra d'Analisi dell'Università di Pisa e poi di quella di Milano nel 1934.

Nel 1938, a causa dei "Provvedimenti per la difesa della razza nella scuola fascista",
venne espulso dall'università nonché da tutte le Accademie e dall'Unione Matematica Italiana.
Dopo la guerra riprese il suo posto a Milano fino al 1949, anno in cui fu chiamato all'Università di Torino (per la cattedra di Matematiche complementari)
e qui rimase sino alla morte.
A Torino inoltre organizzò un **corso di cultura matematica post-universitario per la preparazione degli insegnanti di scuola media**.

La produzione scientifica di Guido Ascoli non è molto vasta, ma di grande qualità e riguarda soprattutto temi centrali dell'Analisi, come lo studio asintotico delle equazioni differenziali lineari, l'approssimazione delle funzioni mediante altre assegnate, gli spazi di funzioni.

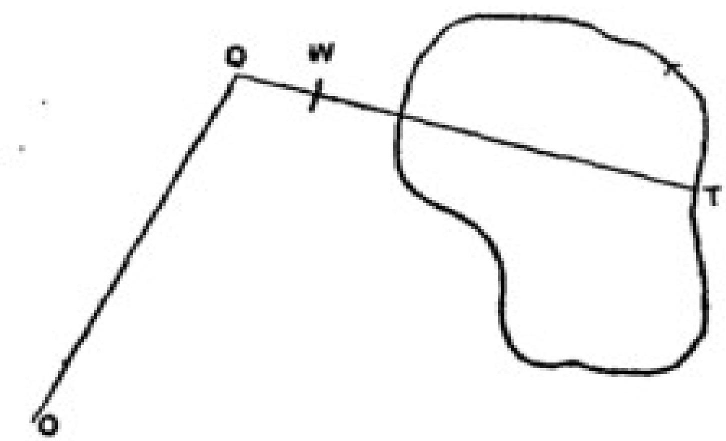
Fu **presidente della Mathesis, sezione piemontese**, e della **Commissione Italiana per l'Insegnamento Matematico**; fu anche socio corrispondente dell'Accademia dei Lincei e dell'Accademia delle Scienze di Torino.

a che serve il planimetro?

<u>a misurare le aree di superfici piane.</u>

come si usa?

tenendo fermo l'estremo di un braccio,
si percorre la curva con la punta all'estremo del secondo braccio (quello con la rotellina)



una volta completato il giro del contorno, si va a vedere di quanto è ruotata la rotella posta sul secondo baccio.

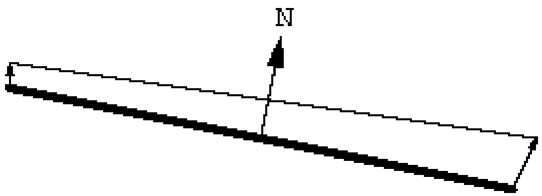
<u>il numero di giri è proporzionale all'area racchiusa dalla curva</u>.

Funzionamento del planimetro: spiegazione “intuitiva”

basato sulla spiegazione di **O. Henrici**, Report on Planimeters,
British Assoc. for the Advancement of Science,
Report of the 64th meeting, 1894, pp. 496-523.
da How Planimeter Work, a cura di **Robert Foote**
http://persweb.wabash.edu/facstaff/footer/planimeter/HowPlanimetersWork.htm
da cui sono tratti i disegni animati

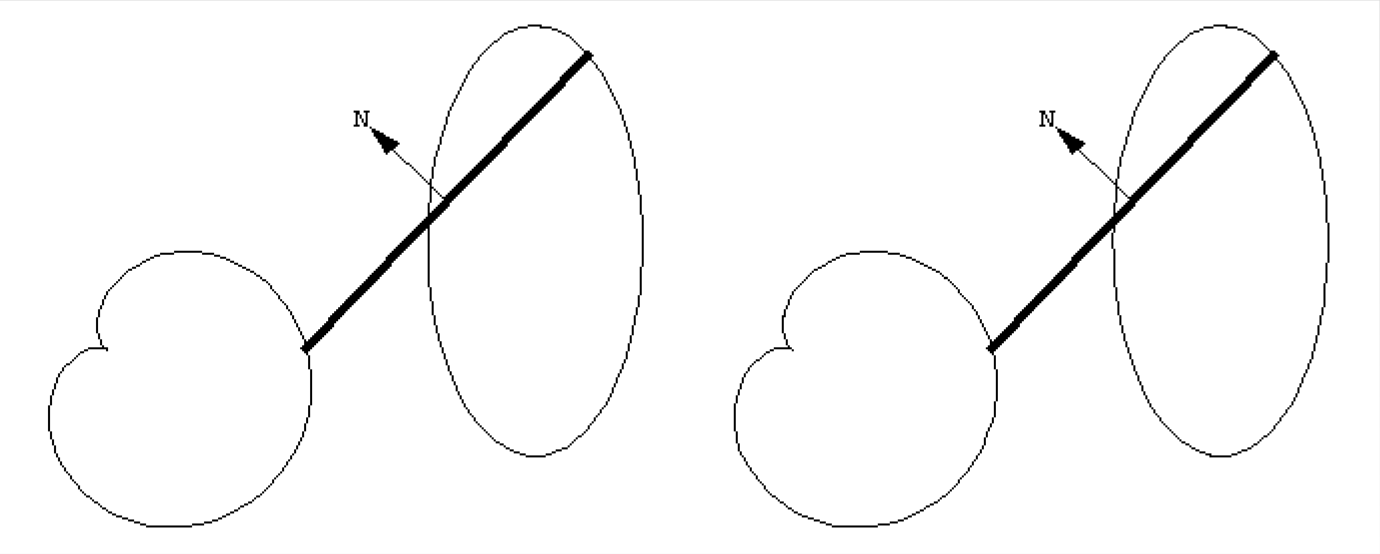
principio base del funzionamento

alla base del funzionamento c'è il concetto di “area spazzata”



(ricordate la seconda legge di Keplero: il raggio vettore
“spazza” aree uguali in tempi uguali)

"Teorema" delle Aree Spazzate dalla sbarretta



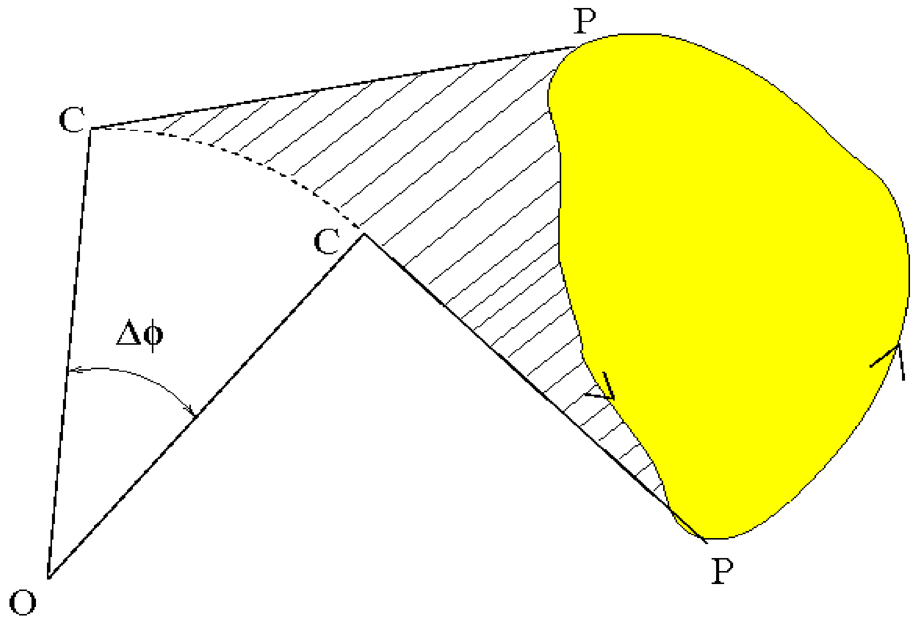
La regione colorata in **blu** è spazzata nel verso positivo della normale mentre quella in **rosso** è spazzata nel verso negativo.
Lo spazio tra le due curve è spazzato in entrambi i versi e nella somma (algebrica) delle aree si cancella.

Quindi l'area (con segno) spazzata è data dalla differenza dell'area della regione il cui contorno è stato percorso dall'estremo di destra della sbarretta (l'ellisse) meno quello della regione contornata dall'estremo sinistro (la "cardioide").

$$A = Ad - As$$

Trasformiamo la sbarretta in un PLANIMETRO

Vincoliamo l'estremo sinistro a muoversi lungo una curva assegnata (p.e. una circonferenza – planimetro polare – o una retta – planimetro planare-)
in modo che quando l'estremo destro ha fatto il giro dell'area da misurare, l'estremo sinistro abbia percorso un segmento della curva su cui è vincolato *nei due versi* (avanti e indietro)
(se la curva vincolare è una retta questo è sempre vero, se la curva vincolare è una circonferenza l'estremo sinistro non deve girare attorno al centro della circonferenza)



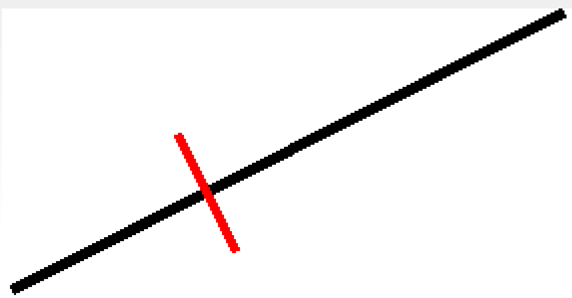
In questo modo l'area contornata dal punto C (As) è nulla e quindi il “teorema della sbarretta” ci dice che **A = Ar** l'area contornata da P resta da risolvere il problema di misurare l'area spazzata!

il secondo braccio può muoversi nel piano in tre modi:

a) traslando nella direzione “longitudinale”;
b) traslando nella direzione “trasversale”;
c) ruotando attorno all'estremo C (punto di unione con il primo braccio).

nel moto longitudinale l'area spazzata è nulla, quindi dobbiamo trovare il modo di misurare l'area spazzata nei moti trasversale e rotatorio.

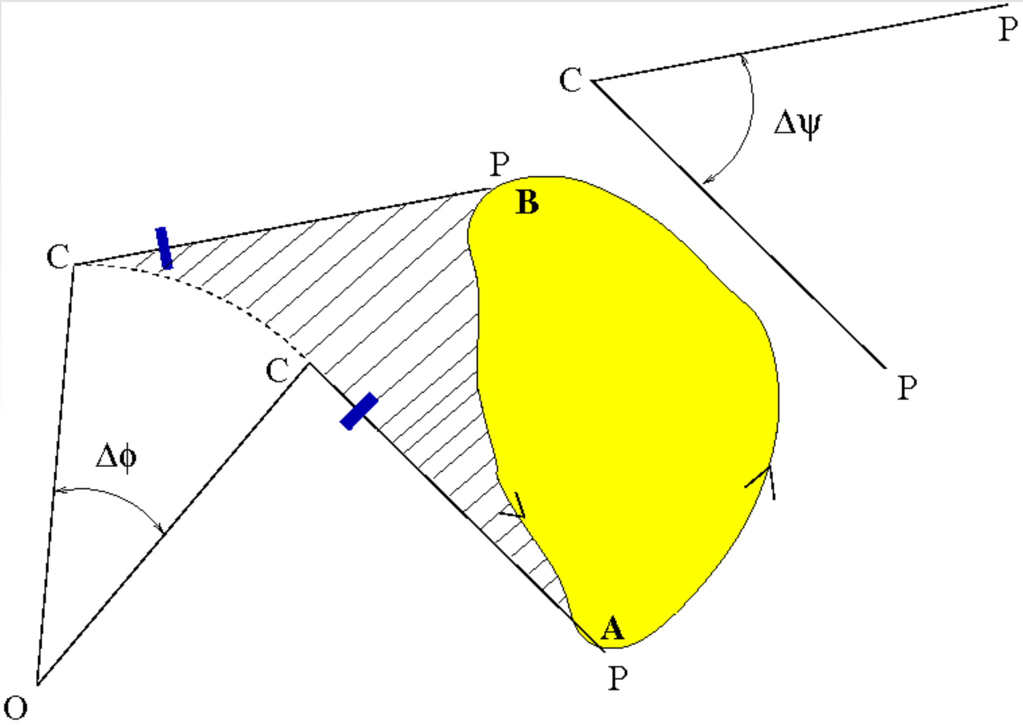
nel braccio mettiamo una rotella con asse parallelo al braccio stesso: essa ruoterà nel moto trasversale e di rotazione mentre slitterà sul piano nel moto longitudinale (la rotella è soggetta a quello che Meccanica si dice un vincolo **anolonomo,** definizione di **H. Hertz**).



nel moto trasversale l'area spazzata sarà uguale a ls dove l è la lunghezza della sbarretta e s è lo spostamento del punto di contatto ($s = r\, d\theta$), indipendentemente dalla posizione della rotella sulla sbarra.

nel moto di rotazione invece l'area spazzata è $\frac{1}{2} l^2\, d\psi$, dove $d\psi$ è l'incremento angolare: anche in questo caso possiamo facilmente esprimere questa area in funzione della la rotazione della rotella, ma in questo caso la relazione dipende dalla distanza della rotella dal centro di rotazione.

MA l'estremo vincolato della sbarretta, C, deve ruotare attorno all'altro estremo della prima sbarretta (è quello che in Meccanica si chiama un vincolo **olonomo)**



quando abbiamo completato il giro del bordo della superficie da misurare, la somma algebrica delle rotazioni attorno a C è NULLA

(a meno che il punto O non sia interno alla regione di cui si sta misurando l'area, in questo caso si torna alla configurazione di partenza con un incremento angolare multiplo di 2π)

quindi l'angolo totale di rotazione della rotella, dovuto a questo moto è **nullo**.

alla fine resta solo solo il contributo del moto “trasversale”

$$A = l\, r\, \Delta\theta$$

$\Delta\theta =$ angolo di rotazione finale della rotella

il numero di giri della rotella è proporzionale all'area della curva attorno alla quale abbiamo girato.

Un altro modo per dimostrare la relazione tra area e giri della rotella (*ad usum mathematicorum*) ovvero Planimetro e Teorema di Gauss-Green

sulla traccia di Guido Ascoli, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 1947

Ascoli si propone di scoprire la “**ragione profonda**” che consente il funzionamento delle macchine integratrici (di cui il planimetro è una della più semplici).

Inizia la sua analisi dal planimetro, ma da buon matematico, astraendo il più possibile dalla sua realizzazione attuale, e ponendo l'attenzione sui legami tra la sua parti fondamentali:
la **punta tracciante**;
la **rotella planimetrica**.

osserva che il legame tra la posizione della punta, P=(x,y), e il punto di contatto della rotella Q=(ξ,η) è una **trasformazione geometrica** del piano in sé, che possiamo rappresentare come

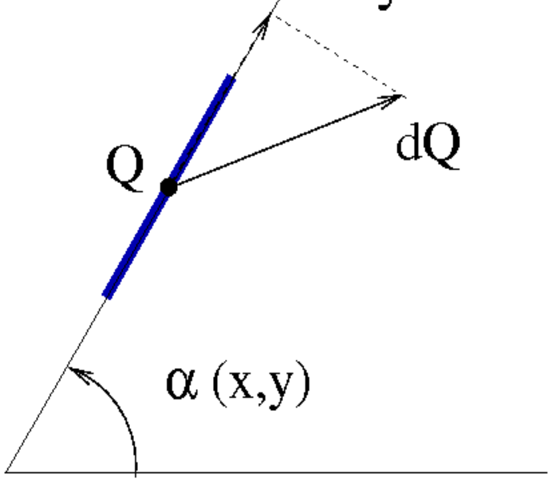
$$\xi = \xi\,(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) \qquad\qquad (\text{ e anche } \ \alpha = \alpha(x,y)$$

dove α è l'angolo tra il piano della rotella e l'asse delle x)

per cui a uno spostamento elementare dP = (dx, dy) del punto P corrisponde uno spostamento del punto Q

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy\,, \qquad d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy$$

$$r\, d\Omega = d\,\xi \cos\alpha + d\,\eta \sin\,\alpha$$



e quindi una rotazione della rotella

$$\begin{aligned} r d\Omega = & \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial x} \sin\alpha \right) \, dx \\ & + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \cos\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y} \sin\alpha \right) \, dy \\ & = M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy \end{aligned}$$

possiamo scrivere $d\Omega = M\,dx + N\,dy$ dove

$$M = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial x}\sin\alpha\,, \quad N = \frac{\partial \xi}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial \eta}{\partial y}\sin\alpha$$

quindi l'angolo totale di variazione subito dalla rotella mentre P percorre una curva chiusa è dato dall'integrale curvilineo

$$\Omega = \int_\gamma M\,dx + N\,dy$$

la formula di **Gauss-Green** lo riconduce all'integrale doppio

$$\Omega = \iint_K \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dx dy$$

a questo punto possiamo caratterizzare un planimetro:

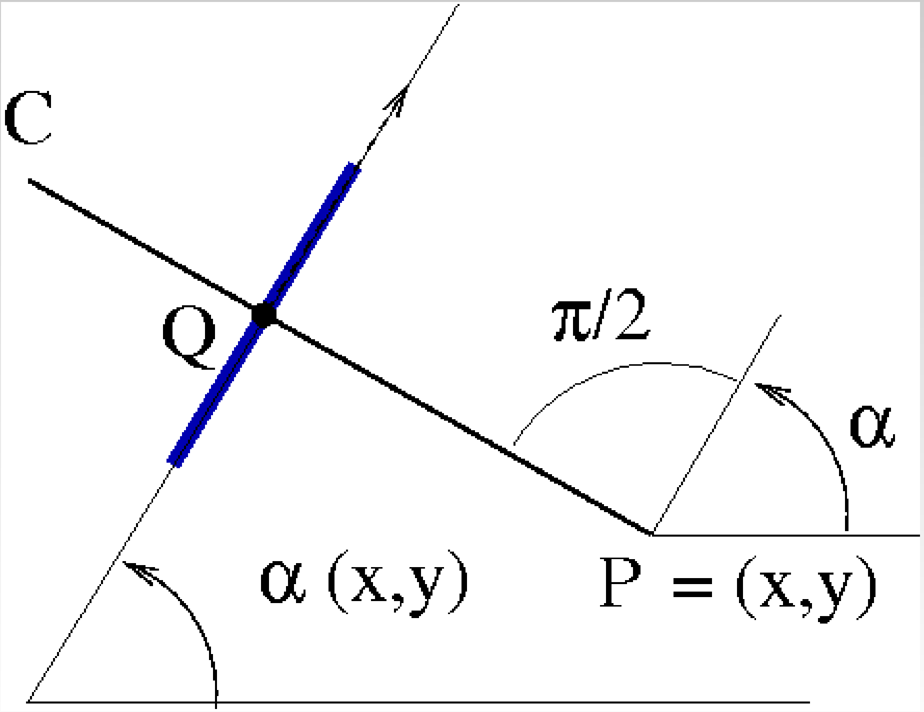
un meccanismo in cui il legame tra **P** (punto tracciante) e **Q** (punto di contatto della rotella),

ovvero la **trasformazione geometrica**,

sia tale che:

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = \lambda$$

dove λ è una costante.



Supponiamo di prendere il punto P a distanza fissata, *a*, dal punto Q, in modo che il segmento PQ sia sempre normale al piano della rotella.
In questo modo le coordinate (x,y) di P, le coordinate (ξ,η) di Q e l'angolo α tra il piano della rotella e l'asse delle x sono legati dalle relazioni

$$\xi = x + a\cos(\alpha + \pi/2) = x - a\sin\alpha$$

$$\eta = y + a\sin(\alpha + \pi/2) = y + a\cos\alpha$$

differenziando e ricordando l'espressione di dΩ, otteniamo

$$d\Omega = [dx - a\cos\alpha\, d\alpha]\cos\alpha + [dy - a\sin\alpha\, d\alpha]\sin\alpha$$

$$= \cos\alpha\, dx + \sin\alpha\, dy - a\, d\alpha$$

notiamo che l'ultimo termine è un differenziale esatto (a patto di non compiere un giro completo) e quindi non dà contributo all'integrale su una curva chiusa.

e quindi

$$\Omega = \iint_K \left(\cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} \right) dx\, dy$$

Per risolvere il problema “planimetrico”

dobbiamo trovare un legame tra x,y e α in modo che

(E.D.P.) $$\cos\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \sin\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial y} = \lambda$$

con λ costante.

L'equazione (E.D.P.) è un'equazione alle derivate parziali quasi-lineare del primo ordine.

$$\cos\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\sin\alpha\,\frac{\partial\alpha}{\partial y}=\lambda$$

Supponiamo che x, y e α siano funzioni di un parametro t, in modo che i coefficienti delle derivate parziali in (E.D.P.) rappresentino le derivate di x(t) e y(t) rispettivamente: allora il primo membro è la derivata di α(x(t), y(t))

poiché il secondo membro è costante, avremo α(x(t), y(t)) = λ t ovvero α è proporzione al parametro t. Potremo quindi scrivere le equazioni per x e y in termini della variabile α

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{1}{\lambda}\cos\alpha\,,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{1}{\lambda}\sin\alpha$$

avremo quindi le seguenti relazioni tra x,y, e α

$$x - \frac{1}{\lambda}\sin\alpha = c' \,, \quad y + \frac{1}{\lambda}\cos\alpha = c''$$

dove *c*' e *c”* sono costanti arbitrarie.

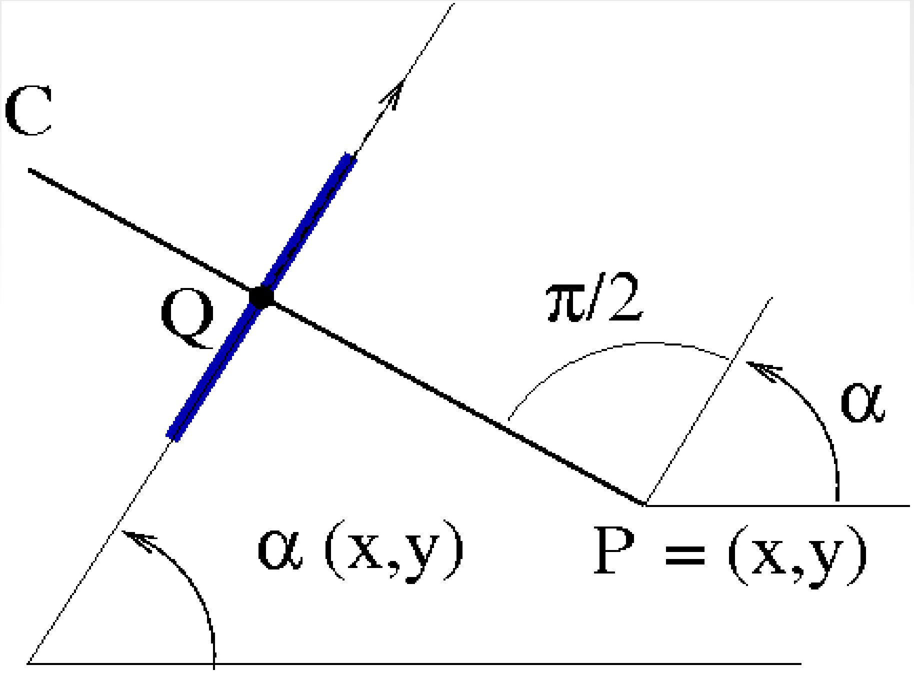
inoltre, data una ***qualsiasi*** funzione F(x,y), potremo esprimere il legame tra x,y, e α nella forma

(I.G.) $$F\left(x - \frac{1}{\lambda}\sin\alpha \,, y + \frac{1}{\lambda}\cos\alpha\right) = 0$$

(questo è detto integrale generale dell'equazione alle der. parz.)

osserviamo infine che il punto C di coordinate

$$\overline{x} = x - \frac{1}{\lambda}\sin\alpha\,, \quad \overline{y} = y + \frac{1}{\lambda}\cos\alpha$$



è sul prolungamento del segmento PQ a distanza 1/λ da P.

ne risulta che per realizzare un **planimetro** basta unire con una sbarretta, perpendicolare al piano della rotella, i punti C, Q e P e poi far scorrere il punto C su di una guida fissata ***arbitraria***

$F(x,y) = 0$ rappresenta l'equazione cartesiana di tale guida.

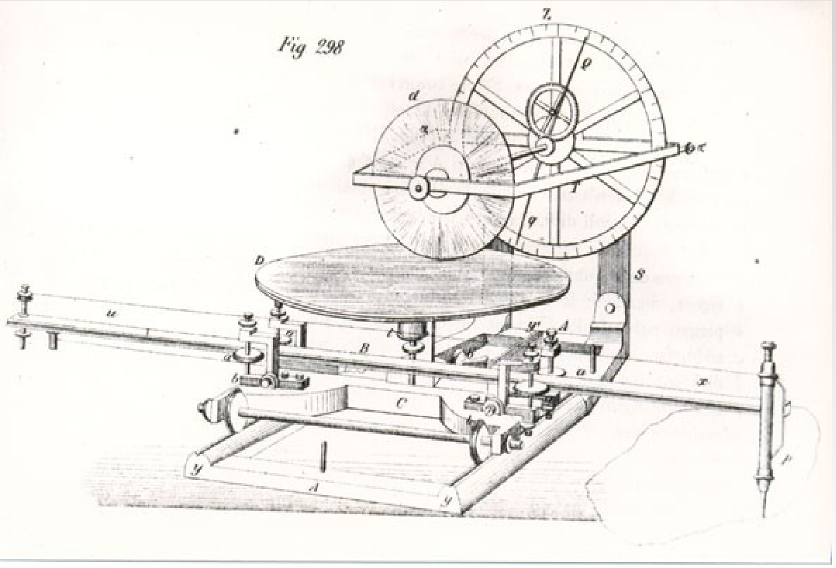
Nella conclusione della sua conferenza, Ascoli fa osserva che l'ingrediente chiave del funzionamento del planimetro (o di ogni altro “integratore” meccanico) è la presenza di un elemento (la rotella) soggetta a un **vincolo anolonomo**:

quando P ha terminato il “giro” del contorno, le aste sono tornate nella stessa configuarazione iniziale (perché soggette a vincoli **olonomi**), ma la rotella **NO:** la sua posizione finale dipende dal percorso che si è effettuto per far tornare le aste alla configurazione iniziale.

Tuttavia la rotella non può muoversi arbitrariamente, anzi la sua “velocità” è completamente determinata dalla velocità di P. Questo legame però non è “integrabile”, ovvero è legato allo spostamento infinitesimo (dx,dy) tramite una forma differenziale $\mathbf{d\Omega = M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy}$
NON ESATTA (e neppure “chiusa”).

Questo può venir “sfruttato” per costruire “meccanicamente” la soluzione di un problema differenziale; p.e. nel caso del planimetro, l'integrazione della forma differenziale che fornisce la <u>circuitazione di un campo vettoriale a rotore costante</u>.

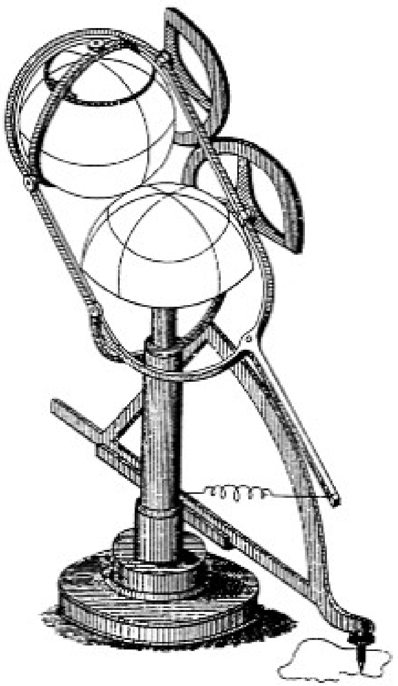
Varianti



il planimetro Gonnella
descritto nel 1824
(ma forse mai realizzato)

il planimetro “sferico”

Maxwell's Planimeter, 1855



il planimetro di
Maxwell (1855)

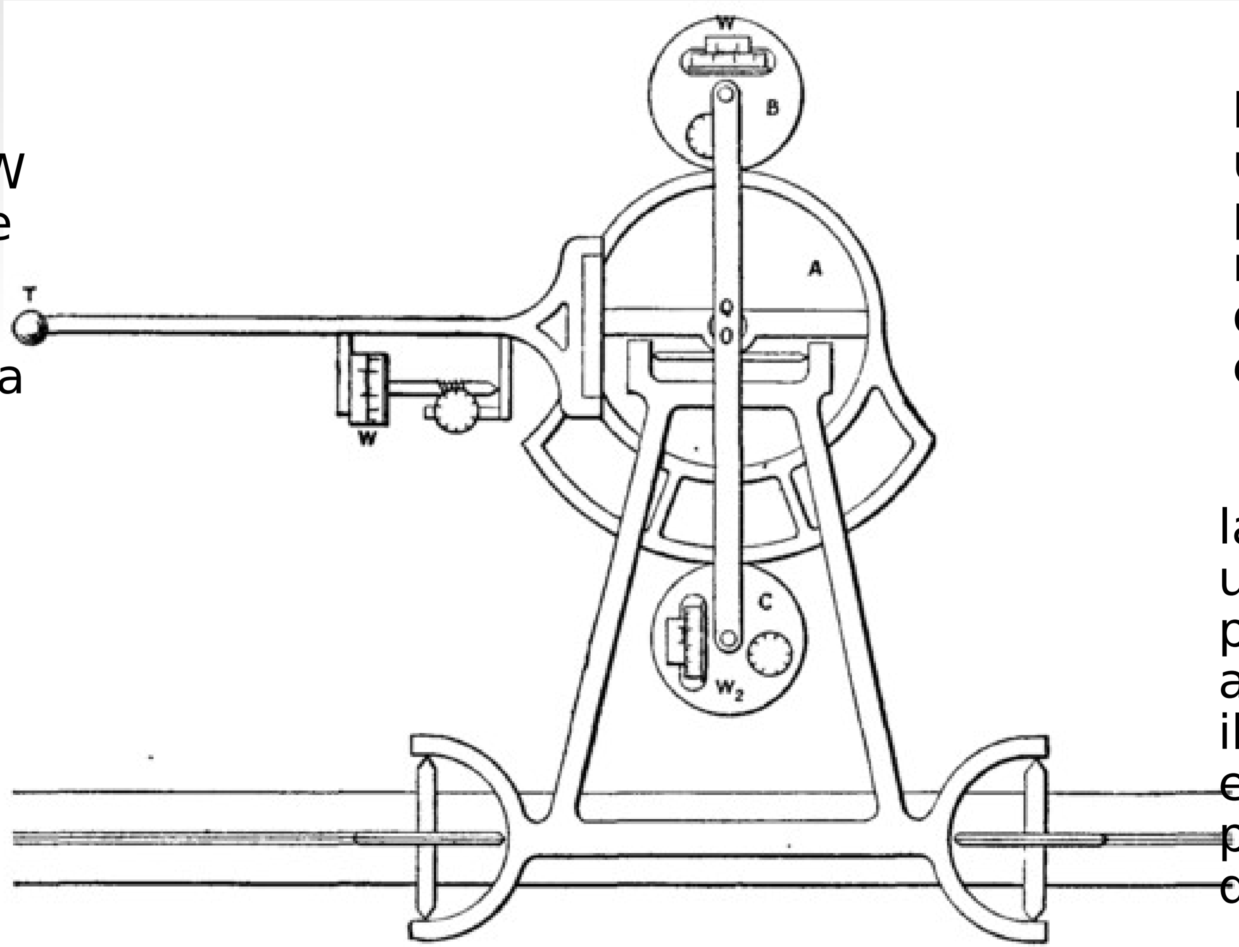
e molte altri ancora
vedere

http://calcollect.free.fr/
siti dell' ANECMA

http://pagesperso-orange.fr/serge.savoysky/

Integratore di Amsler (ovvero tre in un colpo solo)

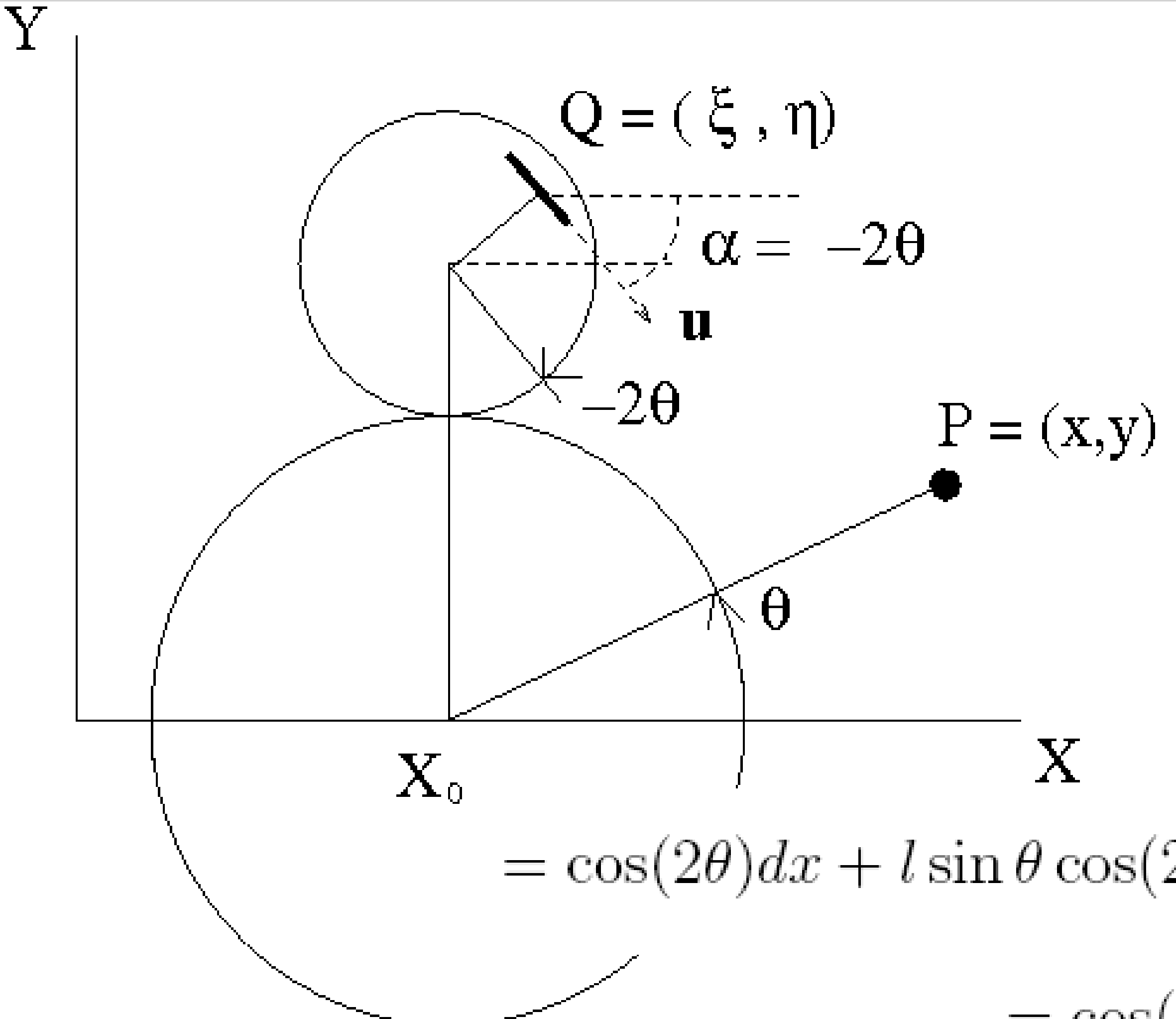
la rotella in W
è un normale
planimetro
planare
quindi calcola
l'area di una
figura piana



la rotella B compie
un numero di giri
proporzionale al
rapporto tra la
quota del baricentro
e l'area della figura

la rotella C compie
un numero di giri
proporzionale
alla differenza tra
il momento d'inerzia
e una quantità
proporzionale all'area
della figura

Calcolo dell'ordinata del baricentro



$$y = l\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad \theta = \theta(y)$$

$$\xi = x - l\cos\theta + a\sin(2\theta)$$
$$\eta = 3a + a\cos(2\theta)$$

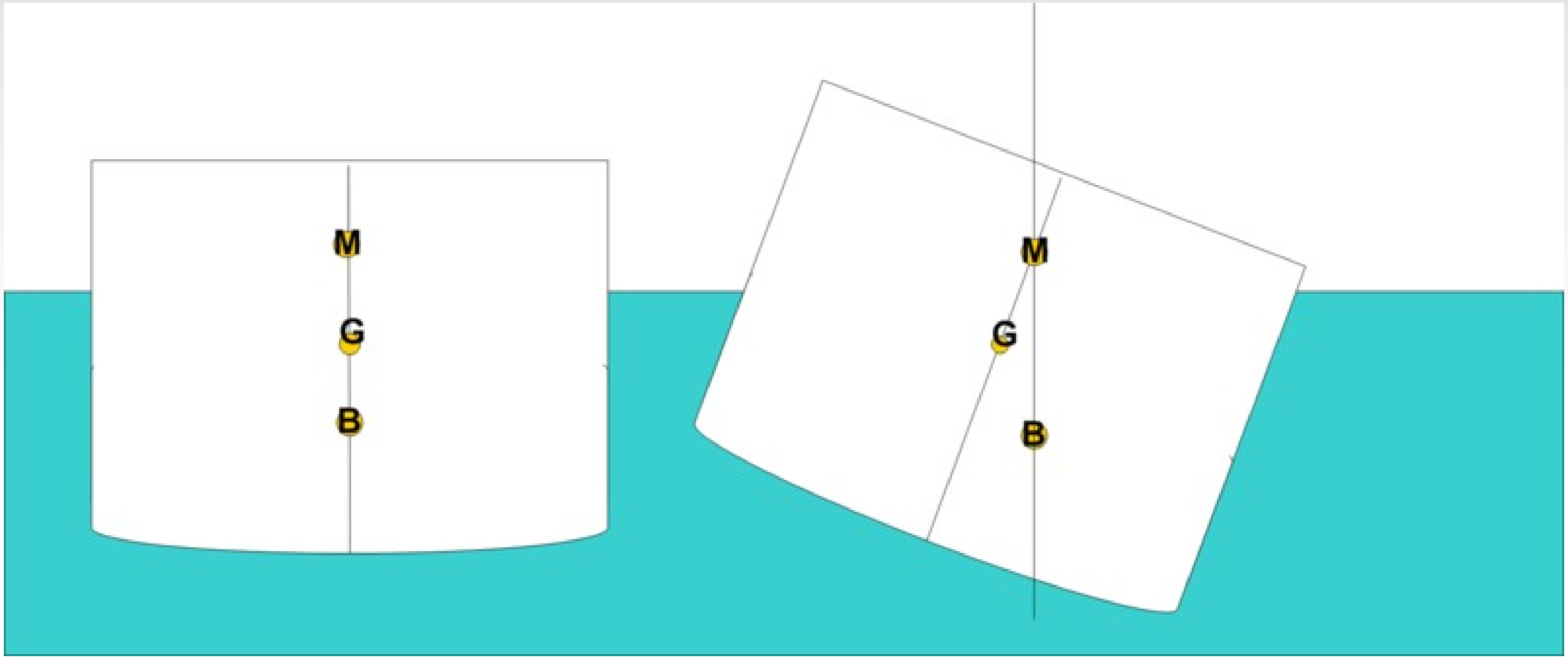
$$rd\Omega = \cos(2\theta)d\xi - \sin(2\theta)d\eta$$

$$= \cos(2\theta)dx + l\sin\theta\cos(2\theta)d\theta + 2a\cos^2(2\theta) + 2a\sin^2(2\theta)$$

$$= \cos(2\theta)dx - \frac{\sin\theta\cos(2\theta)}{\cos\theta}dy + 2ad\theta$$

$$\Omega \propto -\iint \frac{\partial\cos(2\theta)}{\partial y}\,dx\,dy \;= -\iint \frac{\partial(1-2y^2/l^2)}{\partial y}\,dx\,dy = \frac{4}{l^2}\iint y\,dx\,dy$$

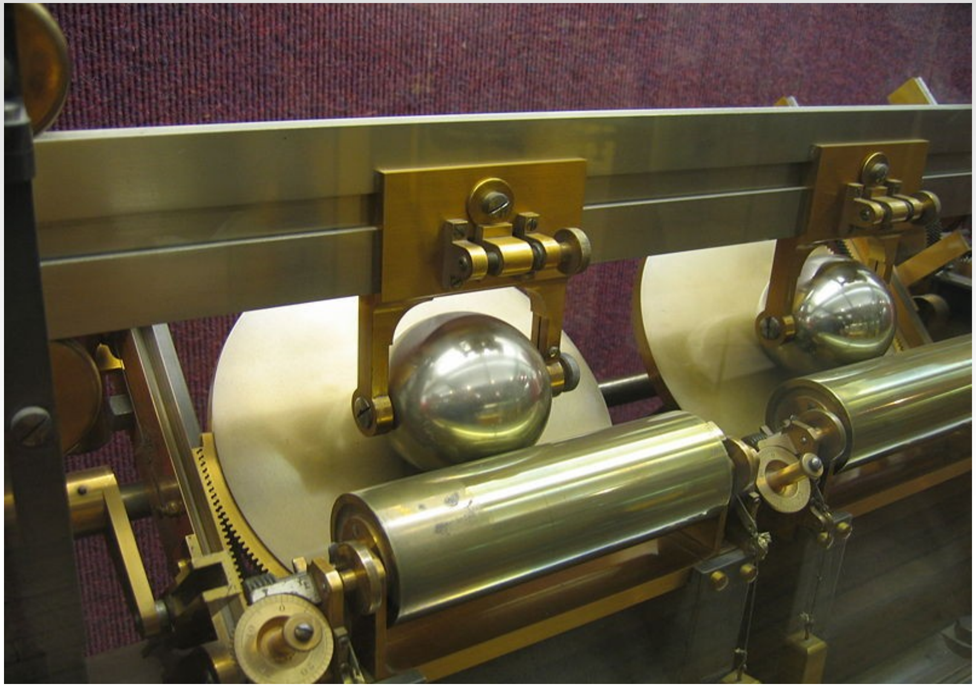
a cosa serviva (e serve tuttora) calcolare queste quantità?



Il punto B (centro di spinta – buoyancy) è il centro di massa dell'acqua spostata, ed anche il baricentro geometrico della figura piana data dalla parte immersa (una sezione dell'imbarcazione).

il valore del momento di inerzia è uno dei fattori che determinano il periodo del rollio.

Analizzatori armonici:

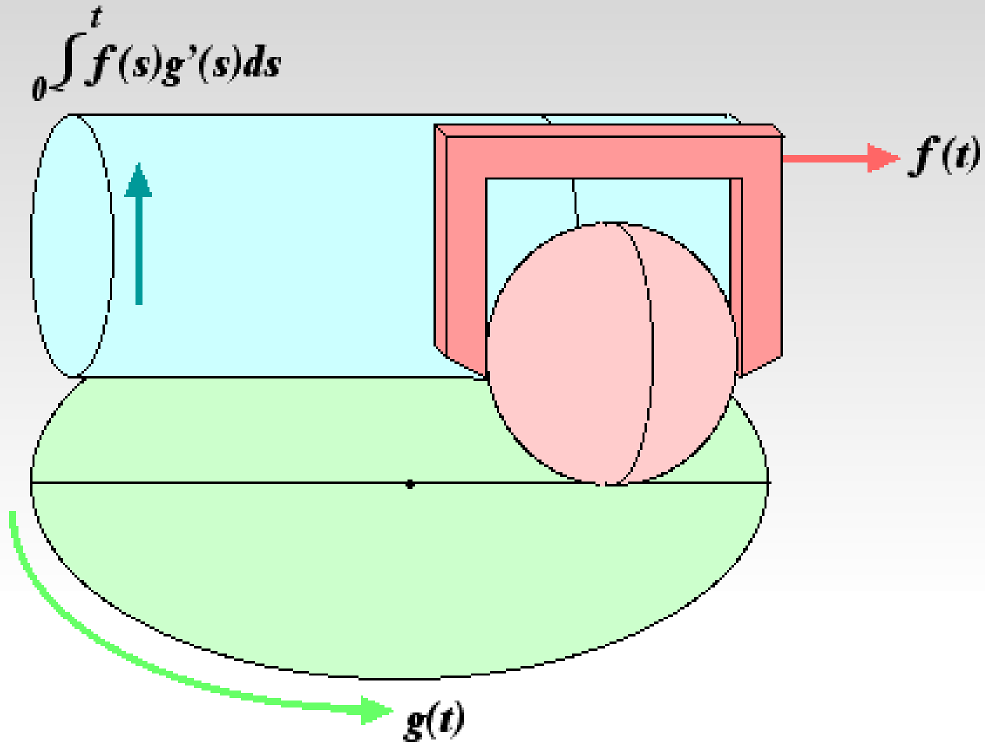


permettono di calcolare i coefficienti di Fourier di una funzione a partire dal suo grafico, anche senza conoscene la forma analitica y=f(x), e quindi anche da curve ottenute da dati sperimentali.

il “trucco” è di inserire dei meccanismi rotanti intermedi in modo che il moto della rotella planimetrica venga trasformato come se il punto tracciante seguisse le curve $y = \sin(nx)\, f(x)$ invece di $y = f(x)$

il primo Analizzatore armonico fu ideato da W. Thomson (Lord Kelvin) (Proc. Roy Soc., vol xxiv., 1876) per analizzare i profili delle maree (Tidal Calculator)

Il meccanismo integratore disco-sfera-cilindro



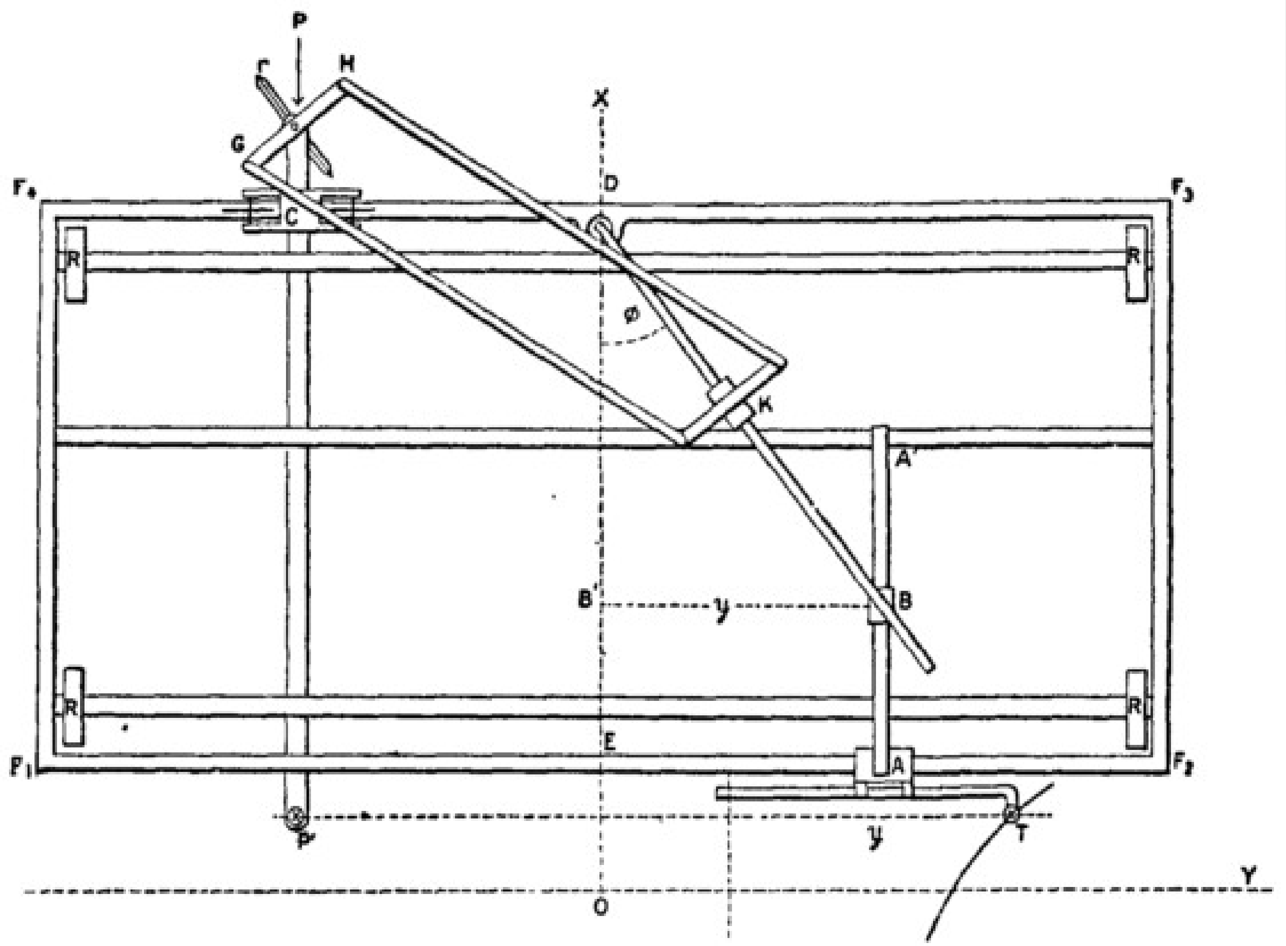
Il centro del disco è fissato. La sfera rotola sul disco. Il suo punto di tangenza va su e giù seguendo f(t) con f=0 al centro del disco. Il cilindro ha l’asse fisso ed è trascinato in rotazione dalla sfera.
Cilindro e sfera hanno lo stesso raggio. Il cilindro non tocca il disco.

Tra t e t+dt, il disco ruota di g’(t)dt radianti.
Poiché la sfera è tangente nel punto di raggio f(t), il punto di tangenza si muove di f(t)g’(t)dt attorno a un asse parallelo al cilindro, i punti sulla superficie del cilindro si muovono della stessa distanza nella direzione opposta.

Integrafi

permettono di tracciare il **grafico della funzione integrale** a partire dal **grafico di una funzione**.

il principio di funzionamento fu descritto da Abdank-Abakanowicz nel 1889



integrafo di Coradi sulla base delle idee di Abdank-Abakanowicz:

il telaio rettangolare si muove nella direzione delle x crescenti.
il punto T viene mosso lungo la curva da integrare, facendo così variare l'angolo φ in modo che tan φ = y/DB'.

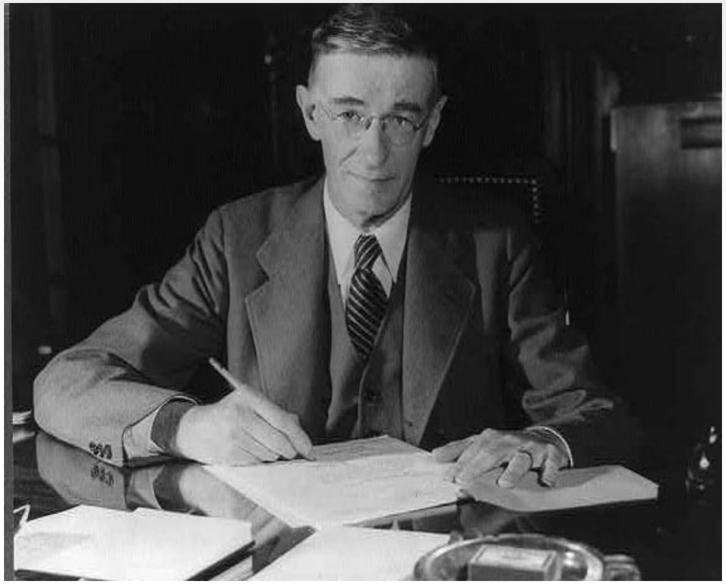
la rotella in P (che grazie al pantografo forma un angolo φ con l'asse x) fa avanzare il suo punto di contatto lungo una curva tangente al piano della rotella, e quindi con derivata proporzionale a y

In Italia, **Ernesto Pascal**, il **“**maestro” di G. Ascoli, realizzò svariati modelli di integrafo, che sono descritti in *I miei integrafi per equazioni differenziali* (1913) (disponibile in rete presso http://digital.library.cornell.edu/m/math/)

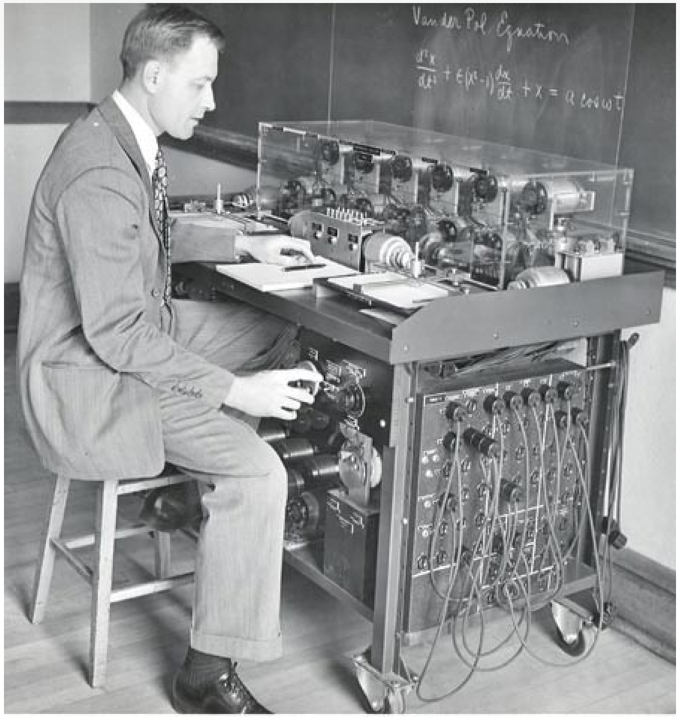
Gli **Analizzatori differenziali**

macchine che **risolvono** equazioni differenziali

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(y, x)$$



Vannevar Bush costruì nel 1927 il primo analizzatore differenziale capace di integrare sistemi di equazioni differenziali.



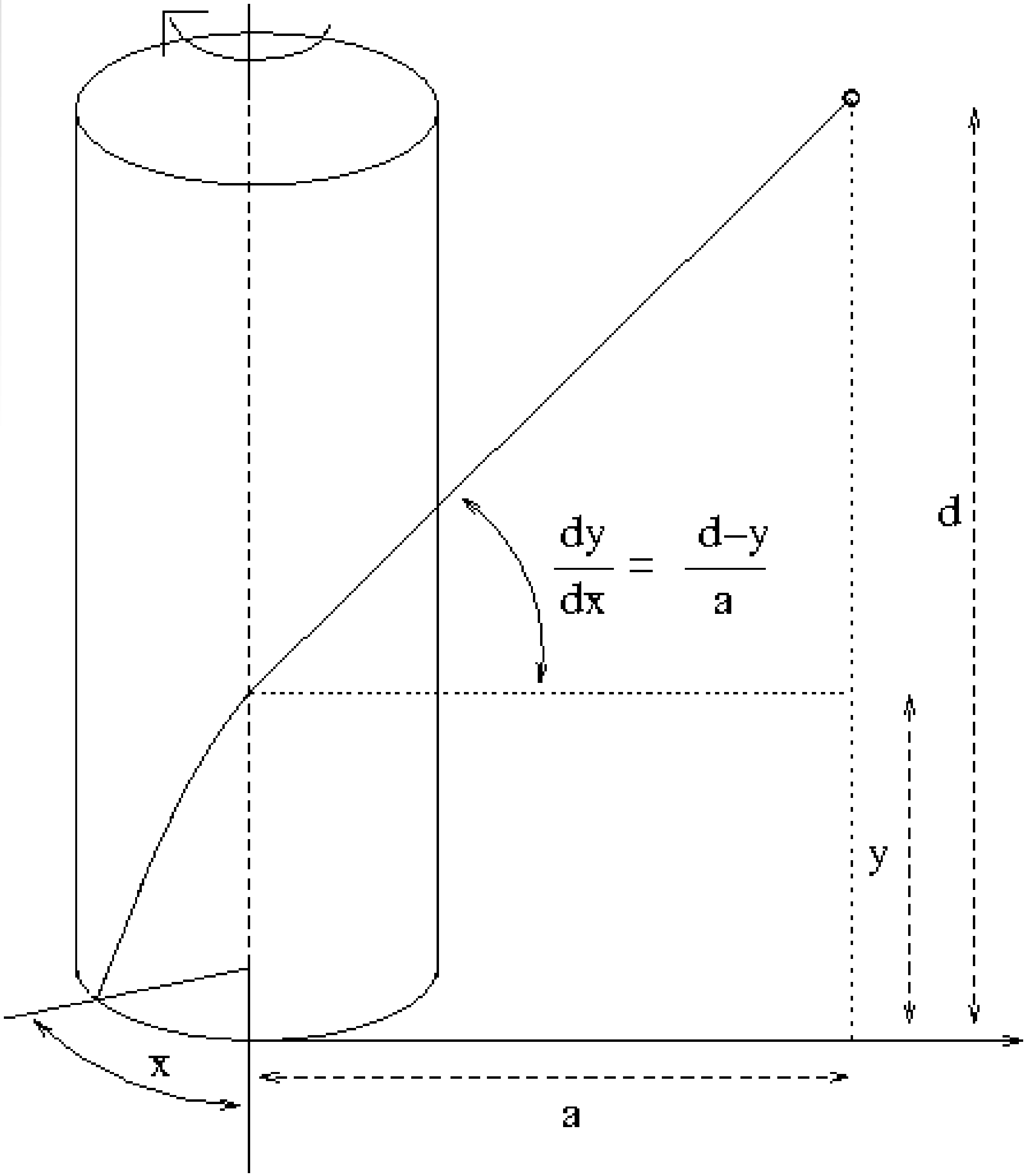
a.d. usato per risolvere l'equazione di Van der Pol

Tim Robinson's Differential Analyzer

http://www.meccano.us/differential_analyzers/robinson_da/

Un precursore: Gaspard-Gustave **Coriolis**

Integratore di Coriolis (J. Math. Pures et Appl. 1836, vol.1)



il primo esempio di integratore meccanico di eq. diff.: ruotando il tamburo, la cordetta si dispone su una curva che è la soluzione dell'equazione differenziale (la variabile indipendente è l'arco di circonferenza sul tamburo)

in questo caso
si risolve l'equazione

$$y' = (d-y)/a$$

$$y(x) = d\,(1 - \exp(-x/a))$$

Coriolis aveva fatto realizzare un modello di questa macchina per l'Ecole Polytecnique

Sur un moyen de tracer des courbes données par des équations différentielles.